全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30^{+}年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧教辅

主编 肖德好

导学案

高中数学

选择性必修第三册 RJB

江西美术出版社
全国百佳图书出版单位

CONTENTS 目录 导学案

05 第五章　数列
PART FIVE

06 第六章　导数及其应用
PART SIX

第五章　数列

5.1　数列基础

5.1.1　数列的概念

【学习目标】

1. 根据数列与集合之间的区别与联系，理解数列的概念及其表示法；
2. 通过观察具体数列，分析、归纳数列的项的变化规律，认识数列的通项公式；
3. 用函数的观点来解释数列的有关问题，加深对数列本质的认识.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　数列的概念及一般形式

1.

- 数列
  - 有关概念
    - 定义：按照________排列的一列数称为数列
    - (1) 项：数列中的________都称为这个数列的项. 各项依次称为这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项……
      (2) 项数：组成数列的数的个数称为数列的________
  - 表示方法
    - 一般形式可以写成 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，其中________表示数列的第 n 项（也称 n 为 a_n 的序号，其中 n 为正整数，即 $n \in \mathbf{N}_+$），称为数列的通项，一般将整个数列简记为________

2. 根据项的个数分类：

类别	含义
有穷数列	项数________的数列，最后一项称为这个数列的末项
无穷数列	项数________的数列

【诊断分析】1. 判断正误.（请在括号中打"√"或"×"）

(1) 李萍从 6 岁到 18 岁每年生日那天测量体重，所测得的体重依次排成一列数，可以构成数列.　（　）

(2) 所有自然数能构成数列.　（　）

(3) 同一个数在数列中可能重复出现.　（　）

(4) 数列 $1,2,3,4,\cdots,2n$ 是无穷数列.　（　）

2. 数列 1,2,3,4,5,6 与数列 6,5,4,3,2,1 是同一个数列吗？

3. $\{a_n\}$ 与 a_n 的含义是否相同？

◆ 知识点二　数列的通项公式

1. 定义：如果数列的第________项________与________之间的关系可以用 $a_n = f(n)$ 来表示，其中 $f(n)$ 是关于 n 的不含其他未知数的表达式，则称这个关系式为这个数列的一个通项公式.

2. 数列的通项公式的作用：(1) 求数列中的任意一项；(2) 检验某数是否是该数列中的一项.

3. 数列的通项公式具有双重身份，它既表示了数列的第________项，又是这个数列中各项的一般表示. 通项公式反映了一个数列项与项数的________关系，给了数列的通项公式，这个数列便确定了，代入项数 n 就可求出数列的________.

【诊断分析】1. 所有数列都有通项公式吗?

2. 如果一个数列有通项公式,那么通项公式唯一吗?

◆ 知识点三　数列与函数的关系

1. 函数与数列的关系

	函数	数列
定义域	**R** 或 **R** 的非空子集	________
解析式	$y=f(x)$	$a_n=f(n)$
值域	y 的取值集合	自变量从小到大依次取________值时对应的函数值
表示方法	解析式法、列表法、图象法	通项公式(解析式法)、列表法(列举法)、图象法

2. 按项的变化趋势分类

类别	含义
递增数列	从第 2 项起,每一项都________它的前一项的数列
递减数列	从第 2 项起,每一项都________它的前一项的数列
常数列	各项都________的数列
摆动数列	一个数列,若至少有 3 项且从第 2 项起,有些项大于它的前一项,有些项小于它的前一项,这样的数列就称为摆动数列

【诊断分析】1. 函数 $f(x)=-12x+52$ 和通项公式 $a_n=-12n+52$ 有什么本质区别?

2. 给出下列两个数列的通项公式,判断它们是递增数列还是递减数列.

(1)$a_n=2n+3$;(2)$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

课中探究　　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　根据数列的通项公式判断数列中的项

[探索] 如何求数列$\{a_n\}$中的指定项 a_k 以及判断某数是否为该数列中的项?

例 1 在数列$\{a_n\}$中,$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2n-1}, n\text{ 为奇数;}\\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, n\text{ 为偶数.}\end{cases}$

(1)试写出这个数列的第 3 项和第 4 项.

(2)判断$\frac{1}{9}$和$-\frac{1}{16}$是否是该数列中的项?若是,求出它是第几项;若不是,说明理由.

变式 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-28n$.

(1)写出数列的第10项和第18项.

(2)-49和-196是该数列中的项吗?若是,是第几项?若不是,请说明理由.

[素养小结]

(1)数列的通项公式给出了第n项a_n与它的序号n之间的关系,只要用序号代替公式中的n,就可以求出数列的相应项.

(2)数列中可能存在一些相等的项.

◆ 探究点二 已知数列的前几项写出数列的一个通项公式

例2 写出下面各数列$\{a_n\}$的一个通项公式,使它的前几项分别是下列各数:

(1)$\frac{4}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{11},\frac{2}{7},\cdots,a_n=$________;

(2)$\frac{2^2-1}{1},\frac{3^2-2}{3},\frac{4^2-3}{5},\frac{5^2-4}{7},\cdots,a_n=$________;

(3)$-1,7,-13,19,\cdots,a_n=$________;

(4)$7,77,777,\cdots,a_n=$________;

(5)$0,3,8,15,24,\cdots,a_n=$________;

(6)$1,\frac{3}{4},\frac{5}{9},\frac{7}{16},\cdots,a_n=$________.

变式 (1)数列$-1,3,-7,15,\cdots$的一个通项公式可以是 ( )

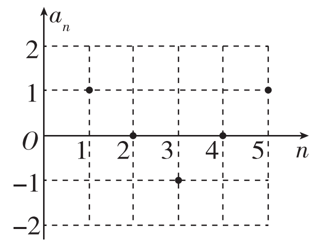
A. $a_n=(-1)^n\cdot(2^n-1),n\in\mathbf{N}^*$

B. $a_n=(-1)^n\cdot(2n-1),n\in\mathbf{N}^*$

C. $a_n=(-1)^{n+1}\cdot(2^n-1),n\in\mathbf{N}^*$

D. $a_n=(-1)^{n+1}\cdot(2n-1),n\in\mathbf{N}^*$

(2)(多选题)已知数列$\{a_n\}$的前5项可以用下图表示,则$\{a_n\}$的通项公式可能为 ( )



A. $a_n=\sin\frac{\pi n}{2}$

B. $a_n=|n-3|-1$

C. $a_n=\begin{cases}-n+2,1\leqslant n\leqslant 3,\\ n-4,n\geqslant 4\end{cases}$

D. $a_n=(n-3)^2-1$

[素养小结]

数列的第n项a_n与n之间的关系可以用$a_n=f(n)$来表示,其中$f(n)$是关于n的不含其他未知数的表达式,这一点解释了数列与函数之间的关系,即可以将(n,a_n)看作是函数$f(x)$的图象上横坐标为正整数的点的坐标.

◆ 探究点三 数列的单调性

[探索] 数列$a_n=-2n^2+3n$与函数$f(x)=-2x^2+3x$的增减性有什么关系?

例3 (1)已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{n-1}{n+1}$,那么数列$\{a_n\}$是 ( )

A. 递增数列　　B. 递减数列

C. 常数列　　D. 摆动数列

(2)已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}(3-a)n-8,n\leqslant 6,\\ a^{n-6},n>6\end{cases}$$(n\in\mathbf{N}_+)$,且数列$\{a_n\}$是递增数列,则实数$a$的取值范围是 ( )

A. $(2,3)$　　B. $[2,3)$

C. $\left(\frac{10}{7},3\right)$　　D. $[2,3]$

变式 下列数列是递减数列的是 ( )

A. $a_n=n^2+4n$　　B. $a_n=\frac{1}{2^n}$

C. $a_n=-n^2+4n$　　D. $a_n=|n-4|$

[素养小结]

数列的单调性的判断方法:

(1)比较数列中任意相邻两项的大小,常用作差法和作商法.

(2)将(n,a_n)看作是函数$f(x)$的图象上横坐标为正整数的点的坐标,通过判断函数的单调性来讨论数列的单调性.

◆ 探究点四　数列中的最值问题

[探索] 参照求函数最值的方法，求解数列中的最值有哪些常见的方法？

例 4 (1)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$，若存在正常数$M$，使得$a_n\leqslant M$对一切$n\in\mathbf{N}^*$都成立，则$M$的最小值为　(　　)

A. 1　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{5}{3}$

(2)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{9^n(n+1)}{10^n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 试问该数列有没有最大项？若有，求出最大项和最大项的序号；若没有，请说明理由.

变式 数列$\left\{\frac{1}{2^n-2023}\right\}$　(　　)

A. 既有最大项，又有最小项

B. 有最大项，无最小项

C. 无最大项，有最小项

D. 既无最大项，又无最小项

[素养小结]

求数列中的最值问题意在考查逻辑推理、数学运算和直观想象的核心素养，求解的关键：

(1)利用数列的单调性确定数列的最值，当数列$\{a_n\}$不单调时，还需解不等式$a_{n+1}-a_n>0$(或$a_{n+1}-a_n<0$)来确定数列递增(递减)的范围，也可解不等式$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$$\left(或\frac{a_{n+1}}{a_n}<1\right)$来确定数列递增(递减)的范围，此时一定要注意$a_n$的取值符号.

(2)利用解不等式组来确定数列的最值，即设数列$\{a_n\}$的第$k(k\in\mathbf{N}^*)$项是最大(小)项，则$\begin{cases}a_k\geqslant a_{k-1},\\a_k\geqslant a_{k+1}\end{cases}(k\geqslant2)$ $\left(\begin{cases}a_k\leqslant a_{k-1},\\a_k\leqslant a_{k+1}\end{cases}(k\geqslant2)\right)$，求出$k$的正整数解即得最大(小)项.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 下列说法正确的是　(　　)

A. 数列$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的第$k$项为$1+\frac{1}{k}$

B. 数列0,2,4,6,8,…可记为$\{2n\}$

C. 数列1,0,−1,−2与数列−2,−1,0,1是相同的数列

D. 数列1,3,5,7可表示为$\{1,3,5,7\}$

2. 数列$-\frac{1}{1},\frac{1}{3},-\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots$的通项公式可能为$a_n=$　(　　)

A. $\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$　　B. $\frac{(-1)^n}{3n-2}$

C. $\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$　　D. $\frac{(-1)^n}{2n-1}$

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2+n$，则72是这个数列的　(　　)

A. 第8项　　B. 第9项

C. 第10项　　D. 第11项

4. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-2n^2+\lambda n$ $(n\in\mathbf{N}^*,\lambda\in\mathbf{R})$，若$\{a_n\}$是递减数列，则$\lambda$的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,4)$　　B. $(-\infty,4]$

C. $(-\infty,6)$　　D. $(-\infty,6]$

5. 已知数列1,2,3,5,8,…，则89是该数列的第________项.

5.1.2 数列中的递推

【学习目标】

1. 理解数列的递推关系，会利用递推关系求指定项；

2. 掌握数列前 n 项和的表示.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　数列的递推关系

1. 如果已知数列的首项(或前几项)，且数列的相邻两项或两项以上的关系都可以用一个公式来表示，则称这个公式为数列的________关系(也称为________公式或________公式).

2. 根据数列的首项(或前几项)以及数列的__________，可以求出这个数列中的每一项.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)数列 2，2.1，2.17，2.178，… 可以写出递推公式.　(　　)

(2)1，3，5，7，9，…为正奇数组成的数列，其递推公式可以写成 $a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=2$.　(　　)

(3)已知 $a_{n+1}-a_n-3=0$，则数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.　(　　)

(4)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_n=2a_{n-1}-2$，则 $a_4=10$.　(　　)

2. 只给出数列的递推关系，不给出数列的第一项或前几项，能确定这个数列吗？

3. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式与递推公式有何区别与联系？

◆ 知识点二　数列的前 n 项和

1. 一般地，给定数列 $\{a_n\}$，称 $S_n=$__________为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

2. 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，那么当 $n\geqslant 2$ 时，有

$S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$，

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$，

所以 $S_n=S_{n-1}+a_n$.

因此 $a_n=\begin{cases}\underline{\qquad\qquad}, n=1, \\ \underline{\qquad\qquad}, n\geqslant 2.\end{cases}$

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　数列的递推关系

例 1 (1)数列 1，3，6，10，15，…的递推公式可以是　(　　)

A. $a_{n+1}-a_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$

B. $a_n-a_{n-1}=n$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$

C. $a_{n+1}-a_n=n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$

D. $a_n-a_{n-1}=n-1$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$

(2)在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-2$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，则 $a_5=$　(　　)

A. -2　　B. $-\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 3

变式 (1)数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$($n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$)，若 $a_1=1$，$a_2=2$，则 $a_9=$　(　　)

A. 2　　B. 1

C. -1　　D. -2

(2)(多选题)意大利数学家斐波那契从兔子繁殖问题中发现了这样的一列数：1，1，2，3，5，8，13，…，即从第三项开始，每一项都是它前两项的和，后人为了纪念他，就把这一列数称为斐波那契数列.下面关于斐波那契数列 $\{a_n\}$ 的说法正确的是　(　　)

A. $a_{12}=144$

B. a_{2028} 是奇数

C. $a_{2022}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2020}$

D. $a_{2024}+a_{2028}=3a_{2026}$

[素养小结]

由递推公式写出数列的项的方法：

(1)根据递推公式写出数列的前几项，首先要弄清楚公式中各部分的关系，依次代入计算即可.

(2)若知道的是末项，则通常将所给公式整理成用后面的项表示前面的项的形式，如 $a_n=2a_{n+1}+1$.

(3)若知道的是首项，则通常将所给公式整理成用前面的项表示后面的项的形式，如 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$.

(4)若 $a_{n+T}=a_n(T\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$是周期数列，此时求指定项问题常通过周期数列的特征转化为求前几项的值的问题.

◆ 探究点二　由递推关系求通项公式

例 2 (1)[2025·江苏连云港高二期末] 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，$(n+1)a_{n+1}=(n+2)a_n$，则 $a_n=$________.

(2)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=2(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

变式 [2025·黑龙江绥化高二期末] 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+2)$，则 $a_4=$　(　　)

A. 2　　B. $\dfrac{7}{4}$

C. $\dfrac{9}{4}$　　D. $\dfrac{11}{4}$

[素养小结]

解决已知数列的递推关系求通项公式的问题，意在培养逻辑推理、数学运算、数学抽象的核心素养，求解的关键：

(1)归纳法：根据数列的某项和递推关系，求出数列的前几项，观察它们的规律，归纳出其通项公式.这种方法一般只适用于选择题和填空题，解决解答题不严密，容易犯"以偏概全"的错误.

(2)累加法：形如 $a_{n+1}-a_n=c$(c 为常数)或 $a_{n+1}-a_n=f(n)$($f(n)$是可以求和的)，常用累加法求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(3)累乘法：形如 $a_{n+1}=pa_n$(p 为常数)或 $a_{n+1}=f(n)a_n$($f(n)$是可以求积的)，常用累乘法求数列$\{a_n\}$的通项公式.

拓展 已知数列$\{a_n\}$的首项为 1，且各项均为正数，若$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

◆ 探究点三　已知 S_n 求通项公式

[探索] 在数列$\{a_n\}$中，若已知其前 n 项和为 S_n，则 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 正确吗？

例 3 (1)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-2n+2$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为__________.

(2)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，点$\left(n,\dfrac{S_n}{n}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$均在函数 $y=3x-2$ 的图象上，则数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$____________.

变式 [2025·四川达州高二期中] 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+n$.

(1)求a_1,a_2,a_3的值;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

[素养小结]

若已知数列的前n项和S_n,则只需利用$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2\end{cases}$求出数列$\{a_n\}$的通项公式,注意检验$a_1$是否满足$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$所确定的$a_n$,若满足,则直接合并为一种形式表示,否则,用分段形式表示.

课堂评价 知识评价 素养形成

1. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+1$,则$a_8=$ ( )

A. 15 B. 16 C. 49 D. 64

2. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_n=-\frac{1}{a_{n-1}-1}(n\geqslant 2)$,则$a_{2023}=$ ( )

A. -2 B. $\frac{1}{2}$

C. -1 D. 2

3. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$,则$a_5=$ ( )

A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{5}{6}$

4. [2025·辽宁沈阳高二期中] 已知首项为1的数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=na_n$,则$a_{2025}=$ ( )

A. 2024 B. 2024!

C. 2025 D. 2025!

5. 若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1}{2}n^2+n$,则$a_n=$________.

5.2 等差数列

5.2.1 等差数列

第1课时 等差数列的定义和通项公式

【学习目标】

1. 理解等差数列的概念及其性质,了解通项公式的推导过程;
2. 掌握等差数列的通项公式;
3. 学会利用一次函数的性质解决等差数列的问题,加深对等差数列本质的认识;
4. 能在具体的问题情境中发现数列的等差关系,并解决相应的问题.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点一 等差数列的定义**

一般地,如果数列$\{a_n\}$从第2项起,每一项与它的________之差都等于________,即________恒成立,则称$\{a_n\}$为等差数列,其中d称为等差数列的公差.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)一座楼房第一层的每级台阶距离地面的高度(单位:cm)依次为16,32,48,64,80,96,112,128,…,320,这组数据可以构成等差数列. ( )

(2)若数列$\{a_n\}$的前4项分别为1,2,3,4,则$\{a_n\}$$(n>4)$一定是等差数列. ( )

(3)若一个数列从第2项起每一项与它的前一项之差都是常数，则这个数列一定是等差数列．（　）

2．定义中的“同一个常数”应如何理解？

◆ **知识点二　等差数列的通项公式**

1． 如果等差数列$\{a_n\}$的首项是a_1，公差是d，那么该等差数列的通项公式为$a_n=$________．

2． 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_n-a_m=$________d或$d=$________$(m,n\in\mathbf{N}_+,m\neq n)$，其第$n$项$a_n$也可以表示为$a_n=a_m+(n-m)d$．

【诊断分析】 若已知等差数列$\{a_n\}$的任意两项a_n和$a_m(m,n\in\mathbf{N}_+,m\neq n)$，可以求其通项公式吗？

◆ **知识点三　从函数角度认识等差数列**

1． 若数列$\{a_n\}$是等差数列，首项为a_1，公差为d，则$a_n=a_1+(n-1)d=nd+a_1-d$，如果记$f(x)=dx+a_1-d$，则$a_n=f(n)$，由此可看出：

(1)当公差$d=0$时，$f(x)$是常数函数，此时数列$\{a_n\}$是________数列(即公差为0的等差数列是________数列)．

(2)当公差$d\neq0$时，$f(x)$是________函数，而且$f(x)$的增减性依赖于公差d的符号，因此，当$d>0$时，$\{a_n\}$是________数列；当$d<0$时，$\{a_n\}$是________数列．

(3)点(n,a_n)落在直线____________上，这些点的横坐标每增加1，函数值增加________．

2． 若一个数列的通项公式是关于n的一次函数形式，则可以证明这个数列是等差数列，即$\{a_n\}$是等差数列的充要条件是$a_n=$________，其中公差为k，首项为$b+k$．

【诊断分析】 1．判断正误．(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若点$(n,a_n)(n\in\mathbf{N}_+)$落在直线$y=x$上，则数列$\{a_n\}$是等差数列．（　）

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_n=3n+2$，则点(n,a_n)所在直线的斜率是3．（　）

2．是不是所有等差数列的通项公式都可以写成形如$a_n=kn+b$的形式？等差数列的通项公式对应的函数一定是一次函数吗？

3．已知一个等差数列$\{a_n\}$的通项公式，设该数列的第s项和第t项分别为a_s和a_t，则公差$d=\dfrac{a_s-a_t}{s-t}(s,t\in\mathbf{N}_+,s\neq t)$，请你说出其几何意义．

课中探究

考点探究　素养小结

◆ **探究点一　等差数列的判断与证明**

例1 判断下列数列是否为等差数列？若是，首项和公差分别是多少？

(1)在数列$\{a_n\}$中，$a_n=3n+2$；

(2)在数列$\{b_n\}$中，$b_n=n^2+n$；

(3)在数列$\{c_n\}$中，$c_n=pn+q$，其中p,q为常数．

变式 判断下列数列$\{a_n\}$是否为等差数列？若是，求出首项及公差；若不是，请说明理由.

(1)数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$；

(2)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，点$(a_n,a_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$在直线$y=x+\frac{1}{2}$上.

[素养小结]

判断和证明一个数列是等差数列意在考查逻辑推理、数学运算的核心素养.求解的方法有：

(1)定义法：利用$a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*)$判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列.

(2)定义变形法：验证数列是否满足$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，若满足，则数列$\{a_n\}$为等差数列.

(3)通项公式法：利用$a_n=kn+b$(k，b为常数)判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列.

注意：通项公式法只能在小题判断中应用，不能作为大题的证明方法.

◆ 探究点二 等差数列的基本量计算

[探索] 等差数列的通项公式的主要作用有哪些？

....

....

角度一 求数列的通项公式

例2 (1)已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=10$，$a_5=9$，求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=\frac{1}{4}a_2$，求$\{a_n\}$的通项公式.

变式 求下列等差数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1)已知$a_1=3$，$a_7=15$；

(2)已知$a_2=8$，且$a_3+a_5=4a_2$；

(3)已知前三项为a，$2a-1$，$3-a$.

[素养小结]

当已知数列中任意两项时，可将其用首项a_1及公差d进行表示，构建方程组，以求解首项a_1及公差d，再利用$a_n=a_1+(n-1)d$进行求解.

拓展 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d，且$a_{11}=-26$，$a_{51}=54$.

(1)求a_{14}的值；

(2)判断该数列从第几项开始为正数？

(2)已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_5=10$，$a_{12}=31$.

①求数列$\{a_n\}$的通项公式；

②若$a_n=13$，求n的值.

角度二　求数列的公差

例3 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d，$a_2+a_4=4$，$a_6+a_{10}=24$，则$d=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

变式 (1)若等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=100$，$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}=-100$，则等差数列$\{a_n\}$的公差$d=$（　　）

A. -2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

(2)[2024·西安高二期中] 在1和31之间插入14个数，使它们与1，31构成公差大于零的等差数列，则该数列的公差为（　　）

A. $\frac{15}{8}$　　B. 30

C. -2　　D. 2

[素养小结]

已知等差数列中任意两项求等差数列的公差的方法：

(1)利用等差数列的通项公式，得到关于公差的方程(组)，解方程(组)即可求出公差；

(2)利用$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$可直接求出公差.

角度三　求数列的项或项数

例4 (1)已知数列$\{a_n\}$满足$2a_{n+1}=2a_n+1$，其中$a_8=\frac{9}{2}$，则$a_3=$（　　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{5}{2}$

变式 [2025·江西上饶高二期中] 已知$\{\ln a_n\}$($a_n>0$)为等差数列，$a_1=3$，$a_6=96$，则$a_3=$（　　）

A. 12　　B. $\frac{201}{5}$

C. $\frac{99}{2}$　　D. $12\sqrt{2}$

[素养小结]

等差数列的通项公式是解决等差数列问题的重要工具，在本节中其应用主要有三个方面：一是用来求解等差数列的通项，二是可以求公差，三是用来求解数列中的项和项数，列方程判断某项是否为等差数列中的项.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 若等差数列$\{a_n\}$满足$a_2=20$，$a_5=8$，则$a_1=$（　　）

A. 24　　B. 23

C. 17　　D. 16

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=0$，公差$d=4$，则$a_5=$（　　）

A. 25　　B. 12

C. 16　　D. 8

3. （多选题）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_3=a_2^2-4$，则数列$\{a_n\}$的公差d的值可能为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

4. 等差数列40，37，34，…中的第一个负数项是第________项.

5. 已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式分别为$a_n=2n-1$，$b_n=3n-2$，设由这两个数列的公共项从小到大排列构成的数列为$\{c_n\}$，则数列$\{c_n\}$的通项公式为________.

第2课时　等差数列的性质

【学习目标】

1. 理解等差中项的概念及应用；
2. 掌握等差数列的性质并能灵活应用.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　等差中项

如果x，A，y是等差数列，那么称A为x与y的________，且$A=$________；反之，若$A=$________，则$A-x=$________，由此可得x，A，y成等差数列.

【诊断分析】任意两个实数都有等差中项吗？

◆ 知识点二　等差数列的性质

1. 如果$\{a_n\}$是等差数列，而且正整数s，t，p，q满足$s+t=p+q$，则____________.

特别地，如果$2s=p+q$，则____________.

2. 已知$\{a_n\}$是公差为d的等差数列.

(1)$\{c+a_n\}$（c为任意常数）是公差为________的等差数列；

(2)$\{c\cdot a_n\}$（c为任意常数）是公差为________的等差数列；

(3)$\{a_n+a_{n+k}\}$（k为常数，$k\in\mathbf{N}^*$）是公差为________的等差数列；

(4)$\{a_{2n-1}\}$是公差为________的等差数列.

3. 若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列，且它们的公差分别是d_1，d_2，则数列a_1+b_1，a_2+b_2，…，a_n+b_n，…是________数列，且公差为________，数列$\{pa_n+qb_n\}$（p，q是常数）是公差为________的等差数列.

【诊断分析】1. 判断正误.（请在括号中打"√"或"×"）

(1)若数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，则数列$\{a_n+3\}$是公差为$d+3$的等差数列.（　　）

(2)若数列$\{a_n\}$是等差数列，则数列$\{2a_n\}$也是等差数列.（　　）

(3)已知数列$\{a_n\}$是等差数列，若$b_n=-a_n$，则数列$\{b_n\}$也是等差数列.（　　）

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，"若项数m，n，p满足$m+n=p$，则a_m，a_n，a_p满足$a_m+a_n=a_p$"，这个说法对吗？

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　等差中项及其应用

例1 (1)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_5+a_6=60$，则a_2+a_8的值为（　　）

A. 15　　B. 20　　C. 30　　D. 40

(2)［2024·辽宁大连高二期中］在a和b两数之间插入2023个数，使它们与a，b组成等差数列$\{c_n\}$，则$c_{1013}=$（　　）

A. $\dfrac{b-a}{2}$　　B. $\dfrac{b-a}{3}$

C. $\dfrac{a+b}{2}$　　D. $\dfrac{ab}{3}$

变式 (1)等差数列$1+x$，$2x+2$，$5x+1$，…的第4项等于（　　）

A. 10　　B. 6

C. 8　　D. 12

(2)[2024·贵州安顺高二期末]已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$,$a_{n+1}=\lambda a_n-4(\lambda>1,n\in\mathbf{N}^*)$,且$a_2+2$是$a_1$和$a_2+6$的等差中项,则实数$\lambda$的值为________.

[素养小结]

a,b,c成等差数列的充要条件是$b=\frac{a+c}{2}$(或$2b=a+c$),可用来进行等差数列的判定,如要证$\{a_n\}$为等差数列,可证$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

◆ 探究点二　等差数列的性质的应用

例2 [2025·陕西铜川高二期中]若等差数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_5+a_{16}+a_{19}=2$,则$a_8+a_{13}=$　(　)

A. 1　B. -1　C. 4　D. 2

变式 在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_7+a_{10}=a_{11}+3$,则$a_1+a_2+\cdots+a_{11}$的值是　(　)

A. 33　B. 66

C. 22　D. 44

[素养小结]

与等差数列的性质有关的问题,意在考查逻辑推理、数学运算的核心素养.求解的关键:

(1)等差数列任意两项间的关系$a_n=a_m+(n-m)d$常用于求其他项或求公差;

(2)若$n+m=2p(p,m,n\in\mathbf{N}^*)$,则$a_n+a_m=2a_p$,常用于求两项的等差中项;

(3)若$n+m=p+q(p,q,m,n\in\mathbf{N}^*)$,则$a_n+a_m=a_p+a_q$,常用于两项和的转化.

拓展 已知等差数列$\{a_n\}$和等差数列$\{b_n\}$各有100项,且$a_1=5,a_2=8,b_1=3,b_2=7$,问两数列共有多少个相同的项?记这些相同的项从小到大依次构成数列$\{c_n\}$,问数列$\{c_n\}$是否为等差数列?

◆ 探究点三　等差数列的实际应用

例3 [2025·北京东城区高二期末]做一个木梯需要7根横梁,这7根横梁的长度从上到下成等差数列,现有长为1.5 m的一根木杆刚好可以截成最上面的3根横梁,长为2 m的一根木杆刚好可以截成最下面的3根横梁,那么正中间的1根横梁的长度(单位:m)是　(　)

A. $\frac{13}{24}$　B. $\frac{7}{12}$　C. $\frac{5}{8}$　D. $\frac{2}{3}$

变式 某城市的绿化建设有如下统计数据:

年份	2021	2022	2023	2024
绿化覆盖率/%	17.0	17.8	18.6	19.4

如果以后的几年继续依此速度发展绿化,那么至少到哪一年该城市的绿化覆盖率可超过23.4%?

[素养小结]

利用等差数列解决实际问题的重点在于从实际问题中得到具体的数学模型,再结合等差数列的概念及性质等进行求解.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=-1$,$a_3+a_7=16$,则数列$\{a_n\}$的公差$d=$　(　)

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

2. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_4=1$,$a_8=8$,则a_{12}的值是　(　)

A. 7　B. 12　C. 15　D. 64

3. (多选题)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d,且$a_{10}>0$,$a_1+a_{20}<0$,则　(　)

A. $a_1<0$　B. $a_{11}<0$

C. $a_9<0$　D. $d<0$

4. [2025·山西太原高二期中]在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_2+a_5+a_9+a_{12}=100$,则a_1+a_{13}的值为________.

5. 在等差数列$\{a_n\}$中,$\frac{a_1+a_3+a_5+a_7}{a_2+a_4+a_6}=$________.

5.2.2 等差数列的前 n 项和

第 1 课时 等差数列的前 n 项和公式

【学习目标】

1. 掌握等差数列的前 n 项和公式及其获取思路；
2. 应用等差数列的前 n 项和公式和性质解决一些简单的与前 n 项和有关的问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等差数列的前 n 项和公式

若等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，其前 n 项和为 S_n，则公式 1：________.（推导方法：倒序相加法）

公式 2：________.$\left(\text{推导方法：将 } a_n = a_1+(n-1)d \text{ 代入 } S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2} \text{ 即可得到}\right)$

【诊断分析】1. 判断正误.（请在括号中打"√"或"×"）

(1)等差数列$\{a_n\}$的前 $n-1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$项的和 $S_{n-1}=(n-1)a_1+\dfrac{(n-1)(n-2)d}{2}$. （ ）

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_1=2,d=2$，则其前 20 项和 $S_{20}=420$. （ ）

(3)等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=4$，$S_4=20$，则数列$\{a_n\}$的公差 $d=2$. （ ）

2. 等差数列前 n 项和的两个公式的适用条件分别是什么？

◆ 知识点二 等差数列的前 n 项和公式与二次函数的关系

公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$ 可化成关于 n 的解析式：$S_n=$________. 当 $d\neq 0$ 时，是一个常数项为零的二次函数，即点(n,S_n)在其相应的二次函数的图象上，这就是说等差数列的前 n 项和是关于 n 的二次函数. 这便给出了一种判断数列是否为等差数列的方法.

【诊断分析】判断正误.（请在括号中打"√"或"×"）

(1)若数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_1>0$，$S_6=S_{11}$，则 S_n 的最大值在 n 为 8 或 9 时取到. （ ）

(2)若等差数列$\{a_n\}$满足 $a_9+a_{10}+a_{11}>0$，$a_8+a_{13}<0$，则当$\{a_n\}$的前 n 项和最大时，$n=10$. （ ）

(3)在数列$\{a_n\}$中，若 $a_1=32$，$a_{n+1}=a_n-4$，则$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 取得最大值时 n 的值有两个. （ ）

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等差数列的前 n 项和公式的推导

例 1 计算：$1+2+3+\cdots+50$.

变式 计算：$1+2+\cdots+n$.

[素养小结]

(1)计算等差数列前 n 项和的方法称为倒序相加法,使用了 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots=a_n+a_1$ 这一性质.

(2)前 n 项和的表达式有两种形式,无论采用哪种形式进行运算,首项和公差都是必备条件.

◆ 探究点二　等差数列前 n 项和的基本运算

例 2　已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,前 n 项和为 S_n.

(1)若 $a_1=\frac{3}{2},d=-\frac{1}{2},S_n=-15$,求 n 及 a_n;

(2)若 $a_1=1,a_n=-512,S_n=-1022$,求 d.

变式　(1)[2024·湖南益阳高二月考] 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_2+a_9=8$,$S_5=-5$,则 S_{15} 的值为　(　　)

A. 125　　B. 135

C. 145　　D. 155

(2)已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $\frac{S_7}{7}+4a_4=30$,则 $3a_5-a_7=$　(　　)

A. 6　　B. 12

C. 24　　D. 48

[素养小结]

解决与等差数列的前 n 项和公式相关的基本量计算问题,意在考查逻辑推理、数学运算的核心素养,求解的关键是需用好"方程"思想,等差数列的 5 个基本量 a_1,d,a_n,n,S_n,一般可以"知三求二",通过等差数列的通项公式与前 n 项和的公式,列出方程(组),即可以求出所要求的量.

◆ 探究点三　利用等差数列的前 n 项和公式判断等差数列

[探索] 若等差数列前 n 项和为 S_n,a_1,d 为常数,S_n 与 n 的关系与哪种函数有关?

例 3 [2024·广东潮州高二期中] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-9n$,则其通项公式为 $a_n=$________;若数列$\{a_n\}$的第 k 项满足 $5<a_k<8$,则 $k=$________.

变式　记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,已知 $a_n>0$,$a_2=3a_1$,且数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列,证明:$\{a_n\}$是等差数列.

[素养小结]

等差数列前 n 项和 S_n 可以写成关于 n 的二次函数的形式,二次项系数为 $\frac{d}{2}$,一次项系数为 $a_1-\frac{d}{2}$,常数项为 0.若数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列,则说明一次项系数为 $a_1-\frac{d}{2}=0$,即 $d=2a_1$.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. [2024·石家庄高二期末] 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=1$,$S_9=6a_5+27$,则 $S_5=$　(　　)

A. 25　　B. 27　　C. 30　　D. 35

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $a_1=35$,公差 $d=-2$,$S_n=0$,则 $n=$　(　　)

A. 33　　B. 34　　C. 35　　D. 36

3. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列,且 $a_2+a_6+a_7+2a_{10}=15$,设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 $S_{13}=$________.

4. [2025·上海奉贤区高二期中] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n满足 $S_n=n^2+1$,则$\{a_n\}$的通项公式为____________.

第2课时　等差数列的前n项和的性质及其应用

【学习目标】

1. 掌握等差数列前n项和的性质及其应用；
2. 掌握裂项相消法在等差数列求和中的应用；
3. 能在具体的问题情境中，发现等差数列的前n项和的模型，并解决相应的问题.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点　等差数列的前n项和的性质

1. 若数列$\{a_n\}$是等差数列，S_n是其前n项和，$k\in\mathbf{N}^*$，那么________，________，________成等差数列，如图所示.

$$\overbrace{\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_k}_{S_k}+\underbrace{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}_{S_{2k}-S_k}+\underbrace{a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_{3k}}_{S_{3k}-S_{2k}}}^{S_{3k}}$$

2. 若S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，则$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$，$S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$.

3. 设数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，$S_{奇}$是前n项中奇数项的和，$S_{偶}$是前n项中偶数项的和，则数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=S_{奇}+S_{偶}$，当等差数列的项数n为奇数时，中间一项记为$a_{中}$，当$n\geqslant2$时，有如下性质：

(1)当n为偶数时，$S_{偶}-S_{奇}=$________；

(2)当n为奇数时，$S_{奇}-S_{偶}=$________，$S_{奇}=$________，$S_{偶}=$________，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=$________，$\dfrac{S_n}{S_{奇}-S_{偶}}=\dfrac{S_{奇}+S_{偶}}{S_{奇}-S_{偶}}=$________.

4. (1)等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1>0$，$d>0$，则前n项和S_n是递增的，即$S_{n+1}>S_n$；若$a_1<0$，$d<0$，则前n项和S_n是递减的，即$S_{n+1}<S_n$.

(2)等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1>0$，$d<0$，则$a_n\geqslant0$且$a_{n+1}\leqslant0$时，S_n取得最大值；若$a_1<0$，$d>0$，则$a_n\leqslant0$且$a_{n+1}\geqslant0$时，S_n取得最小值.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若$\{a_n\}$是等差数列，则a_1+a_2，a_3+a_4，a_5+a_6也是等差数列.　(　　)

(2)设等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n}{3n+1}$，则$\dfrac{a_{11}}{b_{11}}=\dfrac{21}{32}$.　(　　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　等差数列前n项和的性质及其应用

角度一　等差数列中的连续几项的和

例1 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_4=11$，$S_{12}=9$，求S_{20}的值.

角度二　前n项和与中项的关系

例2 已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为等差数列，其前n项和分别为S_n，T_n，且$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n+2}{n+3}$.

(1)求$\dfrac{a_5}{b_5}$的值；

(2)求$\dfrac{a_5+a_6}{b_5+b_6}$的值.

角度三　奇数项和与偶数项和的关系

例 3　一个等差数列的前 12 项和为 354，前 12 项中偶数项之和与奇数项之和的比为 32∶27，求该数列的公差 d 的值.

变式　(1)已知某等差数列共有 $(2n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$ 项，且其中所有奇数项之和为 132，所有偶数项之和为 120，则 $n=$　　(　　)

A. 6　　B. 8

C. 10　　D. 12

(2)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=9$，$S_6=63$，则 $a_7+a_8+a_9=$　　(　　)

A. 63　　B. 71　　C. 99　　D. 117

(3)已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{5n+2}{n+3}$，则 $\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=$　　(　　)

A. $\dfrac{107}{24}$　　B. $\dfrac{7}{24}$　　C. $\dfrac{149}{12}$　　D. $\dfrac{149}{3}$

[素养小结]

在讨论等差数列前 n 项和的性质时，要充分考虑其本质，即前 n 项和与项之间的关系，而不是单单从前 n 项和的公式出发进行讨论.

◆ 探究点二　等差数列的前 n 项和的最值

[探索] 如何判断等差数列前 n 项和的增减性及最值?

例 4　已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=3n^2-41n(n\in\mathbf{N}^*)$，讨论 S_n 的增减性及最值.

例 5　(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=13$，$S_3=S_{11}$，当 $S_n<0$ 时，n 的最小值是　(　　)

A. 15　　B. 16

C. 17　　D. 18

(2)设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_4<0$，$a_5>|a_4|$，则使 $S_n>0$ 成立的最小正整数 n 的值为________.

(3)已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=n^2-11n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_1=$________，S_n 的最小值为________.

变式　(多选题)[2024·河南濮阳高二期中] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差为 d，若 $a_1>0$，$S_{16}>0$，$a_9<0$，则下列结论正确的是　(　　)

A. $d<0$

B. 当 $n=8$ 时，S_n 取得最大值

C. $a_4+a_5+a_{18}<0$

D. 使得 $S_n>0$ 成立的最大整数 n 的值是 17

[素养小结]

求等差数列的前 n 项和的最值，常用的两种方法如下：

(1)将 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$ 配方，转化为求二次函数的最值问题，借助函数单调性来解决.

(2)邻项变号法：

当 $a_1>0$，$d<0$ 时，满足 $\begin{cases}a_n\geqslant 0,\\ a_{n+1}\leqslant 0\end{cases}$ 的项数 n 使 S_n 取得最大值；

当 $a_1<0$，$d>0$ 时，满足 $\begin{cases}a_n\leqslant 0,\\ a_{n+1}\geqslant 0\end{cases}$ 的项数 n 使 S_n 取得最小值.